

*Srijeda, 15. Juli, 2009.*

**Problem 1.** Neka je  $n$  prirodan broj i neka su  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) različiti prirodni brojevi iz skupa  $\{1, \dots, n\}$ , takvi da  $n$  dijeli  $a_i(a_{i+1} - 1)$  za  $i = 1, \dots, k - 1$ . Dokaži da  $n$  ne dijeli  $a_k(a_1 - 1)$ .

**Problem 2.** Neka je  $ABC$  trougao sa centrom opisane kružnice u tački  $O$ . Tačke  $P$  i  $Q$  su unutrašnje tačke stranica  $CA$  i  $AB$ , redom. Neka su  $K$ ,  $L$  i  $M$  središnje tačke segmenata  $BP$ ,  $CQ$  i  $PQ$ , redom i neka je  $\Gamma$  kružnica koja prolazi kroz  $K$ ,  $L$  i  $M$ . Pretpostavimo da je prava  $PQ$  tangenta na kružnicu  $\Gamma$ . Dokaži da je  $OP = OQ$ .

**Problem 3.** Pretpostavimo da je  $s_1, s_2, s_3, \dots$  strogo rastući niz prirodnih brojeva, takav da su oba podniza

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{i} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

aritmetička. Dokaži da je niz  $s_1, s_2, s_3, \dots$  aritmetički.

*Četvrtak, 16. Juli, 2009.*

**Problem 4.** Neka je  $ABC$  trougao sa  $AB = AC$ . Simetrale uglova  $\angle CAB$  i  $\angle ABC$  sijeku stranice  $BC$  i  $CA$  u  $D$  i  $E$ , redom. Neka je  $K$  centar upisane kružnice trougla  $ADC$ . Pretpostavimo da je  $\angle BEK = 45^\circ$ . Naći sve moguće vrijednosti ugla  $\angle CAB$ .

**Problem 5.** Odredi sve funkcije  $f$ , sa skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva, takve da, za sve prirodne brojeve  $a$  i  $b$ , postoji nedegenerisani trougao sa stranama dužina

$$a, f(b) \text{ i } f(b + f(a) - 1).$$

(Trougao je *nedegenerisani* ako mu vrhovi nisu kolinearni.)

**Problem 6.** Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_n$  različiti prirodni brojevi i neka je  $M$  skup od  $n - 1$  prirodnih brojeva, koji ne sadrži  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Skakavac skače duž realne ose, počinjući u tački 0, praveći  $n$  skokova udesno sa dužinama  $a_1, a_2, \dots, a_n$  u nekom poretku. Dokaži da je poredak moguće odabrati tako da skakavac nikad ne skoči ni na jednu tačku iz  $M$ .