

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Srijeda, 16.07.2008.

Zadatak 1. Neka je H ortocentar oštroglog trougla ABC . Kružnica čiji je centar središte duži BC i koja sadrži H siječe pravu BC u tačkama A_1 i A_2 . Analogno, kružnica čiji je centar središte duži CA i koja sadrži H siječe pravu CA u tačkama B_1 i B_2 , a kružnica čiji je centar središte duži AB i koja sadrži H siječe pravu AB u tačkama C_1 i C_2 . Dokazati da tačke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ pripadaju jednoj kružnici.

Zadatak 2. (a) Dokazati da je

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

za sve realne brojeve x, y, z , takve da nijedan od njih nije jednak 1 i za koje važi $xyz = 1$.

(b) Dokazati da se jednakost dostiže za beskonačno mnogo trojki racionalnih brojeva x, y, z , takvih da nijedan od njih nije jednak 1 i za koje važi $xyz = 1$.

Zadatak 3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n^2 + 1$ ima prost djelilac veći od $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Četvrtak, 17.07.2008.

Zadatak 4. Odrediti sve funkcije $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (tj. f je funkcija koja slika pozitivne realne brojeve u pozitivne realne brojeve) za koje je

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

za sve pozitivne realne brojeve w, x, y, z za koje važi $wx = yz$.

Zadatak 5. Neka su n i k prirodni brojevi za koje je $k \geq n$ i $k - n$ paran broj. Dato je $2n$ lampi, označenih brojevima $1, 2, \dots, 2n$; svaka od njih može biti u jednom od sljedeća dva stanja: *uključena* ili *isključena*. U početku su sve lampe isključene. Posmatrajmo nizove *koraka*: u svakom od koraka mijenja se stanje tačno jedne lampe (uključena postaje isključena, a isključena uključena).

Neka je N broj takvih nizova od k koraka, tako da se dobije stanje u kome su sve lampe označene brojevima 1 do n uključene, a sve lampe označene brojevima $n+1$ do $2n$ isključene.

Neka je M broj takvih nizova od k koraka, tako da se dobije stanje u kome su sve lampe označene brojevima 1 do n uključene, a sve lampe označene brojevima $n+1$ do $2n$ isključene i pritom nijednom nije mijenjano stanje lampi označenih brojevima $n+1$ do $2n$.

Izračunati N/M .

Zadatak 6. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga je $|BA| \neq |BC|$. Neka su ω_1 i ω_2 upisane kružnice trouglova ABC i ADC , redom. Neka postoji kružnica ω koja dodiruje polupravu BA nakon tačke A i polupravu BC nakon tačke C , a koja istovremeno dodiruje i prave AD i CD . Dokazati da se zajedničke spoljašnje tangente kružnica ω_1 i ω_2 sekut na ω .