ZADACI

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUGA MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

BOSNIA-HERZEGOVINA
MATHEMATICAL SOCIETY
BHMS

Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel: (++387)(33) 279-975 Fax: (++387)(33) 649-342

Sarajevo, 19.04.2009

I RAZRED

1.) Odrediti sve uređene trojke cijelih brojeva *(x,y,z)* za koje vrijedi

$$xy\left(x^2-y^2\right)+yz\left(y^2-z^2\right)+zx\left(z^2-x^2\right)=1.$$

2.) Koliki je minimum izraza $x+y+z$, ako su x, y, z realni brojevi za koje vrijedi $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ i $x^2+y^2+z^2 \geq 90$?

3.) Da li je moguće u ravni označiti 10 crvenih, 10 plavih i 10 zelenih tačaka (sve različite), tako da su zadovoljeni slijedeći uslovi:

- Za svaku crvenu tačku A postoji plava tačka koja je bliža tački A od bilo koje druge zelene tačke
- Za svaku plavu tačku B postoji zelena tačka koja je bliža tački B od bilo koje druge crvene tačke
- Za svaku zelenu tačku C postoji crvena tačka koja je bliža C od bilo koje plave tačke.

4.) Neka je *C* kružnica sa centrom u *O* i poluprečnika *R*. Iz tačke *A* kružnie *C* konstruišemo tangentu *t* na kružnicu *C*. Konstruiišemo pravu *d* kroz centar *O* kružnice *C* koja siječe tangentu *t* u tački *M* i kružnicu *C* u tačkama *B* i *D* (*B* leži između *O* i *M*). Ako je $\overline{AM}=R\sqrt{3}$, dokaži:

a) Trougao *AMD* je jednakokraki;
b) Centar opisane kružnice okružnice oko trougla *AMD* leži na kružnici *C*.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUŽENjE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUGA MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

BOSNIA-HERZEGOVINA
MATHEMATICAL SOCIETY
BHMS

Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel: (++387)(33) 279-975   Fax: (++387)(33) 649-342

Sarajevo, 19.04.2009.

II RAZRED

1.) U trouglu *ABC* da pravim uglom kod *C*, neka *H* označava podnožje visine iz *C* na stranicu *AB*. Pokaži da zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove *ABC*, *BCH* i *ACH* je jednak $\overline{CH}$

2.) Odrediti minimalnu vrijednost $a \in R$ za koji sistem

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1$$
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1$$

ima rješenje u skupu realnih brojeva.

3.) Razlaganje broja *n* je prikaz broja *n* u obliku zbira prirodnih brojeva. Poredak sabiraka je bitan.

Primjer: za *n=4*, broj razlaganja je 8, jer je 4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2.

Za dati prirodan broj *n*, dokaži da je broj razlaganja jednak 2^{n-1}.

4.) Neka su x, y prirodni brojevi za koje je $\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}$ cijeli broj. Dokazati da su $\frac{x^2-1}{y+1}$ i $\frac{y^2-1}{x+1}$ cijeli brojevi.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUŽENјE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUGA MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

BOSNIA-HERZEGOVINA
MATHEMATICAL SOCIETY
BHMS

Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel: (++387)(33) 279-975 Fax: (++387)(33) 649-342

Sarajevo, 19.04.2009.

III RAZRED

1.) U trouglu ABC važi $\measuredangle C = 90°$, $\measuredangle A = 30°$ i $\overline{BC} = 1$. Neka je u trougao ABC upisan jednakostranični trougao (svaka stranica trougla ABC sadrži po jedan vrh upisanog trougla). Naći najmanju moguću dužinu stranice upisanog jednakostraničnog trougla.

2.) Za zadani prirodan broj n odrediti sve uređene četvorke cijelih brojeva (x_1, x_2, x_3, x_4) koje zadovoljavaju jednačinu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4^n$.

3.) n prirodnih brojeva je dato na tabli. Mogu se dodavati samo prirodni brojevi oblika $\frac{a+b}{a-b}$, gdje su a i b brojevi već napisani na tabli.

a) Odredite najmanje n, tako da dodavajući brojeve na gornji način možemo dobiti bilo koji prirodan broj.

b) Za takvo n odrediti početne brojeve (ispitati sve mogućnosti).

4.) Kolika je najmanja vrijednost izraza $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$, ako su x,y,z nenegativni brojevi za koje je $x+y+z=4$?

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUŽENjE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
UDRUGA MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

BOSNIA-HERZEGOVINA
MATHEMATICAL SOCIETY
BHMS

Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel: (++387)(33) 279-975 Fax: (++387)(33) 649-342

Sarajevo, 19.04.2009.

IV RAZRED

1.) Dokazati da za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n tako da su $m+n+1$ potpun kvadrat i $mn+1$ potpun kub nekih prirodnih brojeva.

2.) Neka je ABC jednakostranični trougao čija je dužina visine jednaka 1. Kružnica sa centrom sa iste strane prave AB kao i tačka C i poluprečnikom 1 dodiruje stranicu AB. Kružnica se kotrlja (kliže) po stranici AB. Dok se kotrlja, uvijek siječe stranice AC i BC. Dokaži da dužina luka kruga, koji je unutar trougla, je konstantna.

3.) n prirodnih brojeva je dato na tabli. Mogu se dodavati samo prirodni brojevi oblika $\frac{a+b}{a-b}$, gdje su a i b brojevi već napisani na tabli.

c) Odredite najmanje n, tako da dodavajući brojeve na gornji način možemo dobiti bilo koji prirodan broj.

d) Za takvo n odrediti početne brojeve (ispitati sve mogućnosti).

4.) Kolika je najmanja vrijednost izraza $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$, ako su x,y,z nenegativni brojevi za koje je $x+y+z=4$?

RJEŠENJA

I RAZRED – 1. Zadatak:

Odrediti sve uređene trojke cijelih brojeva *(x,y,z)* za koje vrijedi

$$xy\left(x^2-y^2\right)+yz\left(y^2-z^2\right)+zx\left(z^2-x^2\right)=1.$$

I RJEŠENJE:

Primjetimo da vrijedi

$$xy\left(x^2-y^2\right)+yz\left(y^2-z^2\right)+zx\left(z^2-x^2\right)=$$
$$=xy\left(x^2-y^2\right)+yz\left(y^2-z^2\right)+zx\left(z^2-y^2+y^2-x^2\right)=$$
$$xy(x^2-y^2)-zx(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)-zx(y^2-z^2)=$$
$$=x(x^2-y^2)(y-z)+z(y^2-z^2)(y-x)=$$
$$=(x-y)(y-z)(x(x+y)-z(y+z))=$$
$$=(x-y)(y-z)(x^2-z^2+y(x-z))=$$
$$=(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z).$$

Dakle, polazna jednačina se svodi na

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)=1.$$

Odavde zaključujemo da vrijedi

$$x-y,y-z,z-x\in\{-1,1\}.$$

Dakle, mora vrijediti

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq 0,$$

što je nemoguće.
Prema tome, zadana jednačina nema rješenja u skupu cijelih brojeva.
◄

II RJEŠENJE

1° slučaj – najmanje dva od brojeva *x*, *y*, *z* su djeljiva sa 2
Tada su i izrazi *xy*, *yz* i *xz* djeljivi sa 2,
pa je i desna strana date jednačine djeljiva sa 2, dok desna nije.
Znači, u ovom slučaju jednačina nema rješenje.

2° slučaj – tačno jedan broj od brojeva *x*, *y*, *z* je djeljiv sa 2
Bez gubitka opštosti možemo uzeti da je *x* djeljivo sa 2.
Tada su i izrazi *xy* i *xz* djeljivi sa 2.
Pošto su y^2 i z^2 iste parnosti (oba neparna), imamo da je i $\left(y^2-z^2\right)$ djeljivo sa 2.
Znači, desna strana date jednačine je djeljiva sa 2, pa opet imamo kontradikciju.

3° slučaj – svaki od brojea *x*,*y*,*z*, je neparan
Pošto su x^2,y^2,z^2 iste parnosti, to su izrazi $\left(x^2-y^2\right)$, $\left(y^2-z^2\right)$, $\left(z^2-x^2\right)$ djeljivi sa 2.
Znači, desna strana date jednačine je djeljiva sa 2.

Iz svega imamo da data jednačina nema cjelobrojnih rješenja.
◄

I RAZRED – 2. Zadatak

Koliki je minimum izraza $x+y+z$, ako su x, y, z realni brojevi za koje vrijedi $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ i $x^2 + y^2 + z^2 \geq 90$?

RJEŠENJE:

Neka je $x=4+a, y=5+b, z=6+c$.
Tada je $a, b, c \geq 0$ i vrijedi
$(4+a)^2 + (5+b)^2 + (6+c)^2 \geq 90 \Leftrightarrow a^2 + 8a + b^2 + 10b + c^2 + 12c \geq 13$
S druge strane, dobijamo da je
$(a+b+c+6)^2 =$
$= a^2 + 12a + b^2 + 12b + c^2 + 12c + 2ab + 2bc + 2ca + 36 \geq a^2 + 8a + b^2 + 10b + c^2 + 12c + 36 \geq$
$13 + 36 = 49.$
Dakle, $(a+b+c+6)^2 \geq 49$, odakle zaključujemo da je $a+b+c+6 \geq 7$ ili $a+b+c \geq 1$.
Posljednja nejednakost je ekvivalentna sa $x+y+z \geq 16$.
Kako u posljednjoj nejednakosti znak jednakosti nastupa za $x=4, y=5$ i $z=7$, to zaključujemo da minimalna vrijednost izraza $x+y+z$ iznosi 16.
◄

I RAZRED – 3. Zadatak

Da li je moguće u ravni označiti 10 crvenih, 10 plavih i 10 zelenih tačaka (sve različite), tako da su zadovoljeni slijedeći uslovi:

- Za svaku crvenu tačku A postoji plava tačka koja je bliža tački A od bilo koje druge zelene tačke
- Za svaku plavu tačku B postoji zelena tačka koja je bliža tački B od bilo koje druge crvene tačke
- Za svaku zelenu tačku C postoji crvena tačka koja je bliža C od bilo koje plave tačke.

I RJEŠENJE:

Nije moguće.

Između svih parova različito obojenih tačaka izaberimo jedan od onih sa najmanjim rastojanjem.
Neka su to crvena tačka *C* i plava tačka *P*. Tada, po uslovu zadatka, postoji zelena tačka *Z* takva da je $\overline{PZ} < \overline{PC}$, što je kontradikcija.
◄

II RJEŠENJE:

Neka je A_1 crvena i C_1 zelena tačka. Tada postoji B_1 - plava tačka tako da je $\overline{A_1B_1} < \overline{A_1C_1}$.
Dalje, postoji crvena tačka A_2 $(A_2 \not\equiv A_1)$ takva da je $\overline{A_2C_1} < \overline{B_1C_1}$.
Takođe, postoji zelena tačka C_2 $(C_2 \not\equiv C_1)$ takva da je $\overline{B_1C_2} < \overline{A_2B_1}$.

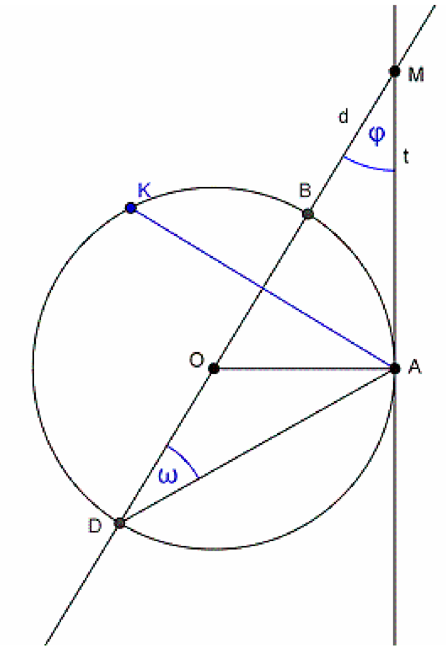
Nastavljajući postupak, dobijamo da mora biti beskonačno mnogo datih tačaka, što je suprotno uslovima zadatka.
Znači, nije moguće u ravni označiti po 10 crvenih, zelenih i plavih tačaka, tako da budu ispunjeni uslovi zadatka.
◄

I RAZRED – 4. Zadatak

Neka je *C* kružnica sa centrom u *O* i poluprečnika *R*. Iz tačke *A* kružnie *C* konstruišemo tangentu *t* na kružnicu *C*. Konstruiišemo pravu *d* kroz centar *O* kružnice *C* koja siječe tangentu *t* u tački *M* i kružnicu *C* u tačkama *B* i *D* (*B* leži između *O* i *M*). Ako je $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, dokaži:

a) Trougao *AMD* je jednakokraki;
b) Centar opisane kružnice okružnice oko trougla *AMD* leži na kružnici *C*.

RJEŠENJE:



Slika 1

a) $\measuredangle OAM = 90°$ - jer je *t* tangenta na kružnicu *C*
Iz Pitagorine teoreme imamo

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 = R^2 + \left(R\sqrt{3}\right)^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\overline{OM} = 2R.$$

Znači u pravouglom trouglu *OAM* imamo

$$\overline{OM} = 2\overline{OA},$$

pa je

$$\varphi = \measuredangle OMA = 30°.$$

Pošto je

$$\overline{OA} = \overline{OD} = R,$$

Trougao *OAD* je jednakokraki sa

$$\measuredangle ODA = \measuredangle OAD = \omega \quad \text{i} \quad \measuredangle AOD = 180° - 2\omega.$$

Ugao *AOG* je vanjski ugao trougla *OAM*. Znači,

$$\measuredangle AOD = 90° + \measuredangle OMA \Rightarrow 180° - 2\omega = 90° + \varphi \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{90° - \varphi}{2} = 30°.$$

Znači, trougao *AMD* je jednakokraki sa $\overline{AM} = \overline{AD}$.

b) Centar opisane kružnice trougla *AMD* leži na simetrali stranice *MD*, koja prolazi kroz vrh *A* i siječe kružnicu *C* u još jednoj tački *K*.
Imamo da je *KA* okomito na *DM*.
Trougao *OAK* je jednakokraki ($\overline{OA} = \overline{OK}$).
Znači, *DM* je simetrala duži *KA*, pa je *DAK* jednakokraki trougao ($\overline{DA} = \overline{DK}$).
Dalje je

$$\measuredangle ADK = 2 \cdot 30° = 60°.$$

Znači, trougao *DAK* je jednakokraki, pri čemu je $\measuredangle ADK = 60°$ ugao pri vrhu.

Pošto su ostala dva ugla trougla *DAK* jednak i njihov zbir je $120°$, to oni iznose po $60°$.
Znači, trougao *DAK* je jednakostranični, pa je

$$\overline{KA} = \overline{KD}.$$

Pošto *K* pripada simetrali stranice *DM*, to je

$$\overline{KM} = \overline{KD}.$$

Iz svega imamo:

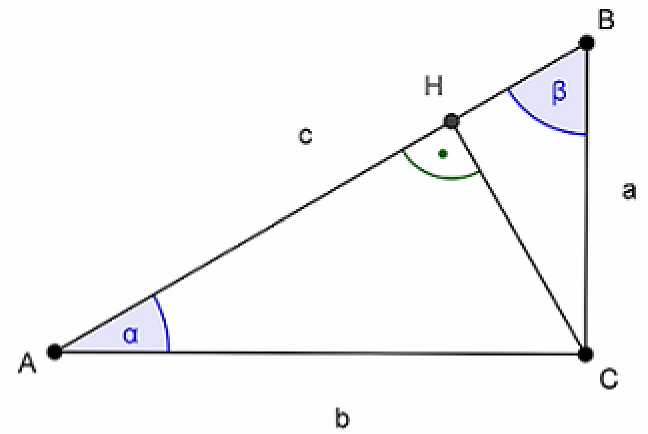
$$\overline{KA} = \overline{KM} = \overline{KD}.$$

Znači, *K* je centar opisane kružnice oko trougla *DAM*.
◄

II RAZRED – 1. Zadatak

U trouglu *ABC* da pravim uglom kod *C*, neka *H* označava podnožje visine iz *C* na stranicu *AB*. Pokaži da zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove *ABC*, *BCH* i *ACH* je jednak $\overline{CH}$

RJEŠENJE:



Neka je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$.
Pošto je *CH* visina na stranicu *AB*, to je trougao *ACH* pravougli, pa je $\measuredangle AHC = 90^\circ$.
Znači, trouglovi *AHC* i *ABC* imaju dva ugla jednaka, pa su slični.
Analogno, trouglovi *BCH* i *ABC* su slični.
Neka su r, r_1, r_2 poluprečnici kružnica upisanih u trouglove *ABC*, *ACH* i *BCH*, redom.

Iz sličnosti trouglova imamo:

$$\frac{r}{r_1}=\frac{c}{b},\quad \frac{r}{r_2}=\frac{c}{a},$$

a odavde:

$$r_1 = r\cdot\frac{b}{c},\quad r_2 = r\cdot\frac{a}{c}.$$

Iz

$$r=\frac{P}{s}=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}$$

Imamo

$$r_1=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{b}{c},\quad r_2=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a}{c}.$$

Znači,

$$r+r_1+r_2=\frac{ab}{a+b+c}+\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a}{c}=$$

$$=\frac{ab}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{c}\right)=\frac{ab}{c}$$

S druge strane, iz sličnosti trouglova *ACH* i *ABC* imamo:

$$\frac{b}{c}=\frac{\overline{CH}}{a},$$

a odavde

$$\overline{CH}=\frac{ab}{c}.$$

Znači,

$$r + r_1 + r_2 = \overline{CH}\ ,$$

što je i trebalo dokazati.

◀

II RAZRED – 2. Zadatak

Odrediti minimalnu vrijednost $a \in R$ za koji sistem

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a - 1$$
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a + 1$$

ima rješenje u skupu realnih brojeva.

RJEŠENJE:

Oduzimanjem zadanih jednačina dobijamo da je

$$2 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) + \left(\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}\right) + \left(\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}\right) =$$
$$\frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} + \frac{2}{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}}.$$

Dakle, dobijamo da je

$$1 = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}} \geq$$
$$\frac{9}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}} = \frac{9}{2a},$$

pri čemu smo primijenili nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine. Dakle,

$$a \geq \frac{9}{2}.$$

Da bi nastupio znak jednakosti u posljednjoj nejednakosti, potrebno je i dovoljno da vrijedi

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1} = 3\ .$$

Rješavajući jednačinu

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 3$$

uvjeravamo se da je jedno njeno rješenje

$$x = \frac{85}{36}.$$

Dakle, za $a = \frac{9}{2}$, rješenje polaznog sistema je $x = y = z = \frac{85}{36}$.

Prema tome, minimalna vrijednost parametra a za koju zadani sistem ima rješenje je $\frac{9}{2}$.

◀

II RAZRED – 3. Zadatak

Razlaganje broja *n* je prikaz broja *n* u obliku zbira prirodnih brojeva. Poredak sabiraka je bitan.

Primjer: za *n*=*4*, broj razlaganja je 8, jer je 4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2.

Za dati prirodan broj *n*, dokaži da je broj razlaganja jednak 2^{n-1}.

I RJEŠENJE:

Posmatrajmo *n* jedinica poredanih u vrstu. Između svake dvije susjedne jedinice možemo da stavimo ili ne stavimo pregradu,
odnosno ukupno na 2^{n-1} načina da stavimo pregrade.
Svakim rasporedom pregrada odgovara jedinstveno razlaganje broja *n*.
Primjer:
$111|1|111|11|1$ je raspored pregrada koji odgovara razlaganju 3+1+3+2+1 broja 10.
◄

II RJEŠENJE:

Indukcija.
Za *n=1* imamo samo jedan prikaz, što je jednako 2^{1-1}.
Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve $n = 1,...k$. Dokažimo da je tačna i za *n=k+1*.
Odaberimo neko $t \in \{1, 2, ..., k\}$. Tada imamo $k+1 = t + (k+1-t)$.
Prema induktivnoj pretpostavci, broj $(k+1-t)$ se može razložiti na 2^{k-t} načina.
Varirajući *t*, imamo ukupan broj načina: $2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 2^0 =$
$2^k - 1$.
Ako ubrojimo još i razlaganje *k+1=k+1* imamo ukupno 2^k razlaganja, što je i trebalo dokazati.
◄

<u>II RAZRED – 4. zadatak.</u>

Neka su x, y prirodni brojevi za koje je $\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$ cijeli broj. Dokazati da su $\frac{x^2-1}{y+1}$ i $\frac{y^2-1}{x+1}$ cijeli brojevi.

RJEŠENJE:

Stavimo da je $a = \frac{x^2-1}{y+1}$ i $b = \frac{y^2-1}{x+1}$.
Tada su *a i b* racionalni brojevi, *a+b* i *ab* nenegativni cijeli brojevi.

Posmatrajmo jednačinu $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

Diskriminanta ove jednačine je $D = (a+b)^2 - 4ab$, pa zaključujemo da je *D* nenegativan cijeli broj.
Kako su rješenja posmatrane jednačine racionalna, to zaključujemo da je $\sqrt{D}$ racionalan, pa prema tome i nenegativan cijeli broj.

Dakle, $|a-b| = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{D}$ je nenegativan cijeli broj.

Prema tome, zaključujemo da su *a+b* i *a-b* cijeli brojevi.

Tada su i *2a, 2b* cijeli brojevi.

Pošto je *a+b* cio broj, to je *a* cio broj akko je *b* cio broj.
Neka *a* nije cio broj. Tada je *a=k/2*, *b=t/2*, gdje su *k* i *t* neparni brojevi. Tada je *ab=kt/4*, pa *ab* nije cio broj, što je kontradikcija.
Znači, *a* i *b* su cijeli brojevi.
◄

ALTERNATIVNO:
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab \quad \Rightarrow$

$|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{D}, \quad (D\in\mathbb{N}) \qquad \Rightarrow$

$\sqrt{D}$ - racionalan broj $\quad \Rightarrow$

$\sqrt{D}$ - cio broj $\qquad \Rightarrow$

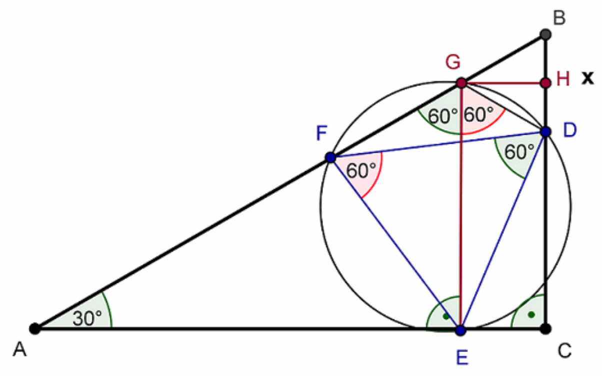
$|a-b|\in\mathbb{N} \quad \Rightarrow$

$a-b\in\mathbb{Z}$

III RAZRED – 1. Zadatak

U trouglu *ABC* važi $\measuredangle C = 90°$, $\measuredangle A = 30°$ i $\overline{BC} = 1$. Neka je u trougao *ABC* upisan jednakostranični trougao (svaka stranica trougla *ABC* sadrži po jedan vrh upisanog trougla). Naći najmanju moguću dužinu stranice upisanog jednakostraničnog trougla.

RJEŠENJE:



Neka je DEF jednakostranični trougao upisan u trougao ABC .Neka je duž EG okomita na stranicu AC.
Iz pravouglog trougla AEG imamo:

$$\measuredangle FGE = 90° - \measuredangle EAG = 90° - 30° = 60°.$$

Pošto je

$$\measuredangle EDF = 60°,$$

to je

$$\measuredangle EDF = \measuredangle FGE,$$

pa su tačke F,E,D,G konciklične.

Pošto tačke F,E,D,G pripadaju istoj kružnici to je

$$\measuredangle EGD = \measuredangle EFD.$$

Dalje je

$$\measuredangle DGB = 180° - 120° = 60°$$

Pošto je

$$\measuredangle DBG = 60°,$$

To je trougao GBD jednakostranični.
Neka je $\overline{BD} = x$ i GH visina trougla GBD.
Tada je

$$\overline{GH} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Četverougao ECHG je pravougaonika, pa je

$$\overline{EC} = \overline{GH} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Iz pravouglog trougla ECD imamo:

$$\overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-x)^2 =$$

$$= \frac{7x^2}{4} - 2x + 1 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \frac{3}{7} \geq \frac{3}{7}.$$

Znači,

$$\overline{ED} \geq \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Dokažimo da se dostiže znak jednakosti.

Iz gornjeg razmatranja imamo da je $\overline{ED}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ akko je $\frac{\sqrt{7}}{2}x-\frac{2}{\sqrt{7}}=0$, tj. akko je

$$x=\frac{4}{7}.$$

Dokažimo da za proizvoljnu vrijednost $\overline{BD}=x$ iz intervala $(0,1)$ postoji jednakostranični trougao *FDE*.

Neka je E tačka na stranici AC, tako da je $\overline{EC}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Neka je tačka G tačka na na stranici AB, tako da je $\overline{BG}=x$.
Tada je BGD jednakostranični trougao.

Neka je GH visina trougla BGD. Tada je $\overline{GH}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, pa je $\overline{EC}=\overline{GH}$, tj. četverougao *ECHG* je pravougaonik.
Iz trougla AEG je $\measuredangle FGE=60°$, pa je i $\measuredangle EGD=60°$.
Na stranici AB uzmimo tačku F, tako da je $\measuredangle EDF=60°$.
Tada je $\measuredangle EDF=\measuredangle FGE$, pa je četverougao F,E,D,G konciklićan,
pa je $\measuredangle EGD=\measuredangle EFD$.
Znači, trougao DEF ima dva ugla od po $60°$, pa je jednakostraničan.
◄

III RAZRED – 2. Zadatak

Za zadani prirodan broj *n* odrediti sve uređene četvorke cijelih brojeva (x_1,x_2,x_3,x_4) koje zadovoljavaju jednačinu $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4^n$.

RJEŠENJE:

Pretpostavimo najprije da je $n=1$.
Tada dobijamo jednačinu

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4,$$

pa zaključujemo da vrijedi
$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\{(\pm2,0,0,0),(0,\pm2,0,0),(0,0,\pm2,0),(0,0,0,\pm2),(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)\}$.
Pretpostavimo sada da je $n\geq 2$. Tada je desna strana zadane jednačine djeljiva sa 8. Pokažimo da brojevi x_1,x_2,x_3,x_4 moraju biti djeljivi sa 2.
Imamo da je

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 0 \pmod 8.$$

Kvadrat cijelog broja pri djeljenju sa 8 može dati ostatke 0,1,4
Ako se među ostacima nađe jedna jedinica, tada se mora pojaviti paran broj jedinica (da bi zbir bio paran).
Znači, imamo slijedeće slučajeve:

1+1+1+1
1+1+0+0

1+1+4+4
1+1+0+4

Ni u jednom od slučajeva nemamo djeljivost sa 8.
Znači, nijedan od brojeva $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ pri djeljenju sa 8 ne može dati ostatak 1, pa je svaki od brojeva x_1, x_2, x_3, x_4 paran.
Dakle, zaključujemo da je $x_1 = 2k_1, x_2 = 2k_2, x_3 = 2k_3, x_4 = 2k_4$.

Uvrstimo li ovo u polaznu jednačinu dobijamo da je $(2k_1)^2 + (2k_2)^2 + (2k_3)^2 + (2k_4)^2 = 4^n$, odnosno

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 4^{n-1}.$$

Ukoliko je $n-1 \geq 2$, onda, na osnovu dokazanog, zaključujemo da brojevi k_1,k_2,k_3,k_4 moraju biti parni, tj. vrijedi $k_1 = 2l_1, k_2 = 2l_2, k_3 = 2l_3, k_4 = 2l_4$, za neke cijele brojeve l_1, l_2, l_3, l_4.
Nastavljajući ovaj postupak, zaključujemo da je
$x_1 = 2^{n-1}m_1, x_2 = 2^{n-1}m_2, x_3 = 2^{n-1}m_3, x_4 = 2^{n-1}m_4$, za neke cijele brojeve m_1, m_2, m_3, m_4.
Uvrštavajući ovo u polaznu jednačinu dobijamo da vrijedi

$$\left(2^{n-1}m_1\right)^2 + \left(2^{n-1}m_2\right)^2 + \left(2^{n-1}m_3\right)^2 + \left(2^{n-1}m_4\right)^2 = 4^n,$$

odnosno

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = 4.$$

Odavde zaključujemo da
$(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \{(\pm 2,0,0,0), (0,\pm 2,0,0), (0,0,\pm 2,0), (0,0,0,\pm 2), (\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1)\}$. Dakle, rješenja jednačine u ovom slučaju su
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(\pm 2^n,0,0,0), (0,\pm 2^n,0,0), (0,0,\pm 2^n,0), (0,0,0,\pm 2^n), (\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1})\}$.
Dakle, sva rješenja polazne jednačine su
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(\pm 2^n,0,0,0), (0,\pm 2^n,0,0), (0,0,\pm 2^n,0), (0,0,0,\pm 2^n), (\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1},\pm 2^{n-1})\}$.
◄

III RAZRED – 3. Zadatak

n prirodnih brojeva je dato na tabli. Mogu se dodavati samo prirodni brojevi oblika $\frac{a+b}{a-b}$, gdje su *a* i *b* brojevi već napisani na tabli.

a) Odredite najmanje *n*, tako da dodavajući brojeve na gornji način možemo dobiti bilo koji prirodan broj.

b) Za takvo *n* odrediti početne brojeve (ispitati sve mogućnosti).

RJEŠENJE:

Odgovor: $\{1,2\}$ ili $\{1,3\}$.

Pošto je $a+b > a-b$ ne možemo dobiti jedinicu. Znači, jedinica mora biti napisana na tabli.

(Pokažimo da su dva broja dovoljna.)

Neka je x drugi broj. $\frac{x+1}{x-1}$ je jedini broj koji se može dobiti u prvom koraku. Pošto važi $\frac{x+1}{x-1} \geq 2$, to je $x \leq 3$. Znači, drugi broj je 2 ili 3.

Dobijamo: $\{1,2\}$ ili $\{1,3\}$. (Dokažimo da su oni dovoljni.)

I slučaj

Neka na tabli imamo brojeve $\{1,2\}$.

Iz $\frac{2+1}{2-1}=3$ dobijamo: $\{1,2,3\}$

Dokažimo induktivno da možemo dobiti bilo koji prirodan broj.
Pretpostavimo da na tabli imamo brojeve $\{1,2,3,...,2k+1\}$. Tada možemo dobiti *2k+2* i *2k+3*.

$$2k+3=\frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)}, \quad 2k+2=\frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)}.$$

II slučaj

Neka na tabli imamo brojeve $\{1,3\}$.

Iz $\frac{3+1}{3-1}=2$ dobijamo: $\{1,2,3\}$.
Dalje analogno kao u prvom slučaju.
◄

III RAZRED – 4. Zadatak

Kolika je najmanja vrijednost izraza $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$, ako su *x,y,z* nenegativni brojevi za koje je *x+y+z=4*?

I RJEŠENJE:

Imamo *A-3*=$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+\left(\sqrt{3y+1}-1\right)+\left(\sqrt{4z+1}-1\right)\geq$

$$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+\left(\sqrt{2y+1}-1\right)+\left(\sqrt{2z+1}-1\right)=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}\geq$$

$$\frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2$$

Dakle, $A\geq 5$.
Kako u posljednjoj nejednakosti znak jednakosti vrijedi za *x=4, y=z=0*, to zaključujemo da je minimalna vrijednost izraza *A=5*.

II RJEŠENJE:
Označimo

$$A(x,y,z)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\,.$$

Dokažimo da važi:

$$A(x,y,z)\geq A(x+y,0,z)=A(4-z,0,z)\geq 5\,.$$

$$A(x,y,z)\geq A(x+y,0,z)$$

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\geq\sqrt{2(x+y)+1}+\sqrt{3\cdot 0+1}+\sqrt{4z+1}$$

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}\geq\sqrt{2(x+y)+1}+1$$

$$\sqrt{3y+1}-1\geq\sqrt{2(x+y)+1}-\sqrt{2x+1}$$

Ako je $y=0$, važi znak jednakosti. Ako je $y\neq 0$, imamo:

$$\frac{3y}{\sqrt{3y+1}+1}\geq\frac{2y}{\sqrt{2x+2y+1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$3\cdot\sqrt{2x+2y+1}+3\cdot\sqrt{2x+1}\geq 2\cdot\sqrt{3y+1}+2$$

S druge strane, imamo:

$$3\cdot\sqrt{2x+2y+1}+3\cdot\sqrt{2x+1}\geq 3\cdot\sqrt{2y+1}+3>$$

$$3\cdot\sqrt{2y+1}+2=$$

$$\sqrt{9(2y+1)}+2>$$

$$\sqrt{4(3y+1)}+2=$$

$$2\sqrt{(3y+1)}+2$$

Ovim smo dokazali da važi $A(x,y,z)>A(x+y,0,z)$.

Dokažimo da važi $A(4-z,0,z)\geq 5$.

$$A(4-z,0,z)\geq 5$$

$$\sqrt{2(4-z)+1}+\sqrt{3\cdot 0+1}+\sqrt{4z+1}\geq 5$$

$$\sqrt{9-2z}+\sqrt{4z+1}\geq 4$$

$$\sqrt{9-2z}+\sqrt{4z+1}\geq 4$$

Ako je $\sqrt{4z+1}\geq 4$, posljednja nejednakost je tačna. U suprotnom imamo:

$$\sqrt{9-2z}\geq 4-\sqrt{4z+1}\quad\Big|(\ )^2$$

$$9-2z\geq 16-2\cdot\sqrt{4z+1}+4z+1=17+4z-2\cdot\sqrt{4z+1}$$

$$8+6z\leq 2\cdot\sqrt{4z+1}$$

$$4+3z\leq\sqrt{4z+1}\quad\Big|(\ )^2$$

$$16+24z+9z^2\leq 64z+16$$

$$9z^2-40z\leq 0$$

$$z \cdot (9z - 40) \leq 0$$

Posljednja nejednakost je tačna, jer je $z \leq 4$.

Znači, dokazali smo:
$A(x, y, z) > A(x + y, 0, z) = A(4 - z, 0, z) \geq 5$.
Znak jednakosti se dostiže za $x = 4$, $y = z = 0$.
◄

IVRAZRED – 1. Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n tako da su $m+n+1$ potpun kvadrat i $mn+1$ potpun kub nekih prirodnih brojeva.

RJEŠENJE:

Neka je m bilo koji prirodan broj.
Stavimo da je

$$n = m^2 + 3m + 3.$$

Tada je

$$m+n+1=(m+2)^2$$

i

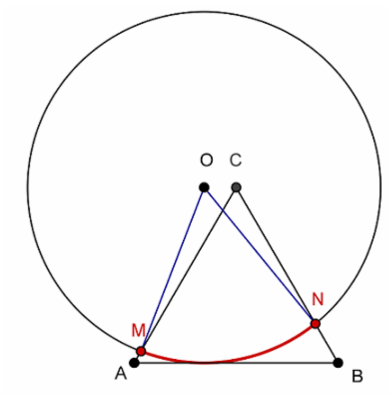
$$mn+1=m(m^2+3m+3)+1=(m+1)^3,$$

što je i trebalo dokazati.
◀

IV RAZRED – 2. Zadatak

Neka je ABC jednakostranični trougao čija je dužina visine jednaka 1. Kružnica sa centrom sa iste strane prave AB kao i tačka C i poluprečnikom 1 dodiruje stranicu AB.
Kružnica se kotrlja (kliže) po stranici AB. Dok se kotrlja, uvijek siječe stranice AC i BC.
Dokaži da dužina luka kruga koji je unutar trougla je konstantna

RJEŠENJE:



Neka je k posmatrana kružnica i neka je O centar kružnice k.
Neka k siječe stranice AC i BC u M i N, redom.
Pošto su tačke O i C jednako udaljene od prave AB, to je

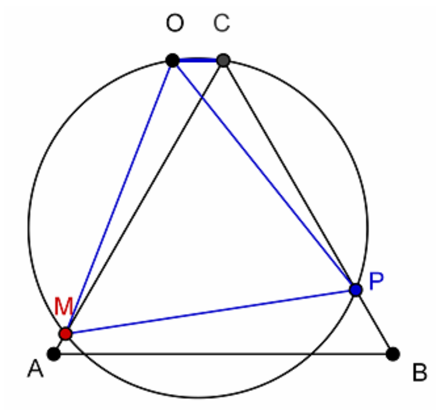
$$OC \parallel AB.$$

Iz $OC \parallel AB$ i $\measuredangle ABC = 60°$, imamo

$$\measuredangle OCB = 120°.$$

S obzirom da je $\measuredangle ACB = 60°$, to je

$$\measuredangle ACO = 60°.$$



Neka kružnica kroz O, C, M siječe BC u P . Dokažimo da je $P \equiv N$.
Pošto je $MOCP$ tetivan četverougao, te iz jednakosti uglova nad istom tetivom imamo da je

$$\sphericalangle PMO = 180° - \sphericalangle OCP = 60° =$$
$$= \sphericalangle MCO = \sphericalangle MPO$$

Znači, trougao MOP ima dva ugla od po $60°$, pa je jednakostranični, pa je

$$\overline{OP} = \overline{OM} = 1,$$

pa se P podudara sa N.

Koristeći podudarnost uglova nad istom tetivom, imamo da je:

$$\sphericalangle MON = \measuredangle MOP = \sphericalangle MCP = 60^\circ .$$

Znači, centralni ugao kružnice k nad lukom $\overparen{MP}$ (dio koji se nalazi unutar trougla ABC) je konstantan, pa je i dužina luka $\overparen{MP}$ konstantna.

◄

<u>IV RAZRED – 3. Zadatak</u>

n prirodnih brojeva je dato na tabli. Mogu se dodavati samo prirodni brojevi oblika $\frac{a+b}{a-b}$, gdje su a i b brojevi već napisani na tabli.

a) Odredite najmanje n, tako da dodavajući brojeve na gornji način možemo dobiti bilo koji prirodan broj.

b) Za takvo n odrediti početne brojeve (ispitati sve mogućnosti).

RJEŠENJE:

Odgovor: $\{1,2\}$ ili $\{1,3\}$.

Pošto je $a+b > a-b$ ne možemo dobiti jedinicu. Znači, jedinica mora biti napisana na tabli. (Pokažimo da su dva broja dovoljna.)

Neka je x drugi broj. $\frac{x+1}{x-1}$ je jedini broj koji se može dobiti u prvom koraku. Pošto važi $\frac{x+1}{x-1} \geq 2$, to je $x \leq 3$. Znači, drugi broj je 2 ili 3.

Dobijamo: $\{1,2\}$ ili $\{1,3\}$. (Dokažimo da su oni dovoljni.)

I slučaj

Neka na tabli imamo brojeve $\{1,2\}$.

Iz $\frac{2+1}{2-1} = 3$ dobijamo: $\{1,2,3\}$

Dokažimo induktivno da možemo dobiti bilo koji prirodan broj.

Pretpostavimo da na tabli imamo brojeve $\{1,2,3,...,2k+1\}$. Tada možemo dobiti $2k+2$ i $2k+3$.

$$2k+3 = \frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)}, \quad 2k+2 = \frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)}.$$

II slučaj

Neka na tabli imamo brojeve $\{1,3\}$.

Iz $\frac{3+1}{3-1} = 2$ dobijamo: $\{1,2,3\}$.

Dalje analogno kao u prvom slučaju.

◄

IV RAZRED – 4. Zadatak

Kolika je najmanja vrijednost izraza $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$, ako su *x,y,z* nenegativni brojevi za koje je *x+y+z=4*?

I RJEŠENJE:

Imamo *A-3*= $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+\left(\sqrt{3y+1}-1\right)+\left(\sqrt{4z+1}-1\right)\geq$

$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+\left(\sqrt{2y+1}-1\right)+\left(\sqrt{2z+1}-1\right)=$

$=\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\dfrac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\dfrac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}\geq$

$\dfrac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=$

$=\dfrac{8}{\sqrt{9}+1}=2$

Dakle, $A\geq 5$.

Kako u posljednjoj nejednakosti znak jednakosti vrijedi za *x=4, y=z=0*, to zaključujemo da je minimalna vrijednost izraza *A=5*.

II RJEŠENJE:

Označimo

$$A(x,y,z)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\,.$$

Dokažimo da važi:

$$A\left(x,y,z\right)\geq A\left(x+y,0,z\right)=A\left(4-z,0,z\right)\geq 5\,.$$

$$A\left(x,y,z\right)\geq A\left(x+y,0,z\right)$$

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\geq\sqrt{2\left(x+y\right)+1}+\sqrt{3\cdot 0+1}+\sqrt{4z+1}$$

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}\geq\sqrt{2\left(x+y\right)+1}+1$$

$$\sqrt{3y+1}-1\geq\sqrt{2\left(x+y\right)+1}-\sqrt{2x+1}$$

Ako je $y=0$, važi znak jednakosti. Ako je $y\neq 0$, imamo:

$$\frac{3y}{\sqrt{3y+1}+1}\geq\frac{2y}{\sqrt{2x+2y+1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$3\cdot\sqrt{2x+2y+1}+3\cdot\sqrt{2x+1}\geq 2\cdot\sqrt{3y+1}+2$$

S druge strane, imamo:

$$3\cdot\sqrt{2x+2y+1}+3\cdot\sqrt{2x+1}\geq 3\cdot\sqrt{2y+1}+3>$$

$$3\cdot\sqrt{2y+1}+2=$$

$$\sqrt{9\left(2y+1\right)}+2>$$

$$\sqrt{4\left(3y+1\right)}+2=$$

$$2\sqrt{\left(3y+1\right)}+2$$

Ovim smo dokazali da važi $A(x,y,z) > A(x+y,0,z)$.

Dokažimo da važi $A(4-z,0,z) \geq 5$.

$A(4-z,0,z) \geq 5$

$\sqrt{2(4-z)+1} + \sqrt{3\cdot 0+1} + \sqrt{4z+1} \geq 5$

$\sqrt{9-2z} + \sqrt{4z+1} \geq 4$

$\sqrt{9-2z} + \sqrt{4z+1} \geq 4$

Ako je $\sqrt{4z+1} \geq 4$, posljednja nejednakost je tačna. U suprotnom imamo:

$$\sqrt{9-2z} \geq 4-\sqrt{4z+1} \quad \left|(\ )^2\right.$$

$$9-2z \geq 16-2\cdot\sqrt{4z+1}+4z+1 = 17+4z-2\cdot\sqrt{4z+1}$$

$$8+6z \leq 2\cdot\sqrt{4z+1}$$

$$4+3z \leq \sqrt{4z+1} \quad \left|(\ )^2\right.$$

$$16+24z+9z^2 \leq 64z+16$$

$$9z^2-40z \leq 0$$

$$z\cdot(9z-40) \leq 0$$

Posljednja nejednakost je tačna, jer je $z \leq 4$.

Znači, dokazali smo:

$A(x,y,z) > A(x+y,0,z) = A(4-z,0,z) \geq 5$.

Znak jednakosti se dostiže za $x=4$, $y=z=0$.

◄