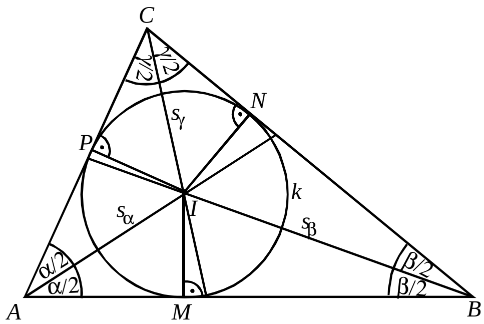
SVE O SIMETRALAMA UNUTRAŠNJIH UGLOVA TROUGLA

U ovom nešto obimnijem radu ćemo dati sve relevantno o simetralama unutrašnjih uglova trougla (definicija, važne teoreme, jednakosti, nejednakosti, itd.).

Definicija 1. Simetrala (bisketrisa) unutrašnjeg ugla trougla je prava koja polovi taj ugao.

Teorema 1. Simetrale unutrašnjih uglova trougla sijeku se u jednoj tački koja je centar upisane kružnice u taj trougao.



Dokaz:

P: $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ su simetrale unutra-šnjih uglova α, β, γ trougla ΔABC.

T: $s_\alpha \cap s_\beta \cap s_\gamma = \{I\}$, I - centar upisane kružnice k u trougao ΔABC.

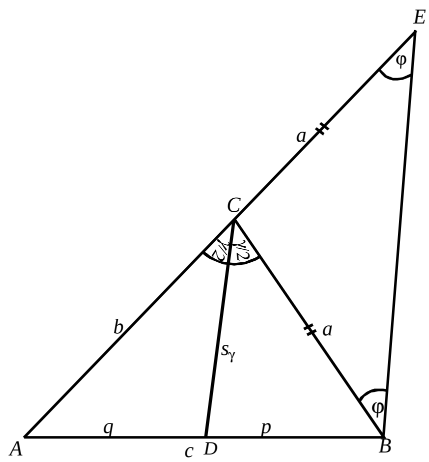
Neka se simetrale s_α i s_β sijeku u tački I. Dokazat ćemo da također $I \in s_\gamma$. Pošto $I \in s_\alpha$, to važi da je $\overline{IM} = \overline{IP}$ (jer svaka tačka na simetrali ugla jednako je udaljena od krakova tog ugla – slijedi iz činjenice da je $\Delta AIM \cong \Delta AIP$ (USU)). Dalje, pošto $I \in s_\beta$, to slijedi da je $\overline{IM} = \overline{IN}$. Sada iz jednakosti $\overline{IM} = \overline{IP}$ i $\overline{IM} = \overline{IN}$ slijedi da je $\overline{IN} = \overline{IP}$, što znači da tačka $I \in s_\gamma$, tj. $s_\alpha \cap s_\beta \cap s_\gamma = \{I\}$, što je trebalo dokazati. Stavljajući da je $r = \overline{IM} = \overline{IN} = \overline{IP}$, slijedi da je tačka I centar kružnice $k(I, r)$ upisane u trougao ΔABC. Ovim je dokaz teorema u potpunosti sproveden.

Sada ćemo formulisati i dokazati sljedeću važnu teoremu.

Teorema 2. Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijelu naspramnu stranicu u omjeru drugih dviju stranica.

Dat ćemo tri razna dokaza ove teoreme.

Dokaz 1 (pomoću Talesove teoreme). Neka u trouglu ΔABC simetrala s_γ ugla $\measuredangle ACB = \gamma$ siječe stranicu AB u tački D. Produžimo stranicu AC premo vrha C do tačke E tako da je $\overline{CE} = \overline{CB} = a$. Neka su u jednakokrakom trouglu ΔBCE uglovi $\measuredangle CBE = \measuredangle CEB = \varphi$. Po teoremi o vanjskom uglu trougla ΔBCE je $2\varphi = \gamma$, a odavde $\varphi = \frac{1}{2}\gamma$, tj. $\measuredangle CBE = \measuredangle BCD = \frac{1}{2}\gamma$, što znači da je $BE \| CD$. Sada na osnovu Talesove teoreme dobijamo:



$$\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AB}\text{, tj.}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD} + \overline{BD}},$$

ili

$$\frac{\overline{AC} + \overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD} + \overline{BD}}{\overline{AD}},$$

a odavde

$$1 + \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}},$$

te najzad zbog $\overline{CE} = \overline{BC}$:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

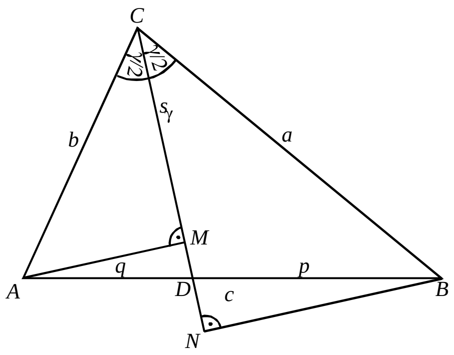
ili

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b};$$

(gdje je $\overline{BD} = p, \overline{AD} = q$), što je i trebalo dokazati.

Dokaz 2 (Pomoću sličnosti trouglova). Neka simetrala s_γ siječe stranicu AB trougla ΔABC u tački D. Označimo sa M i N podnožja normala iz vrhova A i B na pravu CD. Očigledno, pravougli trouglovi ΔAMD i ΔBND su slični (jer

$\measuredangle AMD = \measuredangle BND = 90^0$, te $\measuredangle ADM = \measuredangle BDN$ (unakrsni)). Iz sličnosti ovih trouglova slijedi:



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}. \qquad (1)$$

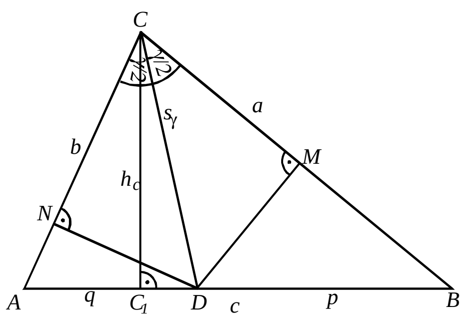
Također, trouglovi ΔAMC i ΔBNC su slični (jer je $\measuredangle AMC = \measuredangle BNC = 90^0$ i $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN = \frac{1}{2}\gamma$) pa imamo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}. \qquad (2)$$

Sada iz (1) i (2) dobijamo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}, \text{ q.e.d.}$$



Dokaz 3. (Pomoću površina trouglova).

Neka je $\overline{CD} = s_\gamma$. Konstruišimo normale $DM \perp BC$ i $DN \perp AC$. Neka je dalje $\overline{CC_1} = h_c$ $(CC_1 \perp AB)$.

Imamo sada:

$$P_{\Delta ACD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{CC_1}}{2} \text{ i } P_{\Delta ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DN}}{2},$$

a odavde

$$\frac{\overline{AD} \cdot \overline{CC_1}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DN}}{2}, \text{ tj.}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{CC_1}}. \qquad (3)$$

Slično, posmatrajući trougao ΔBCD, tj. činjenicu da je

$$P_{\Delta BCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{CC_1}}{2} \text{ i } P_{\Delta BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2},$$

dobijamo

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{CC_1}}. \tag{4}$$

No, kako $D \in s_\gamma$, to je $\overline{DM} = \overline{DN}$ pa najzad dobijamo iz (3) i (4):

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

ili

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}, \text{ q.e.d.}$$

Primjer 1. Trougao je zadan dužinama svojih stranica a, b i c. Odrediti omjere u kojima centar upisane kružnice I dijeli simetrale uglova tog trougla.

Rješenje: Primjenjujući prethodnu teoremu na trougao ΔABC dobijamo ($s_\beta \cap AC = \{B_1\}$):

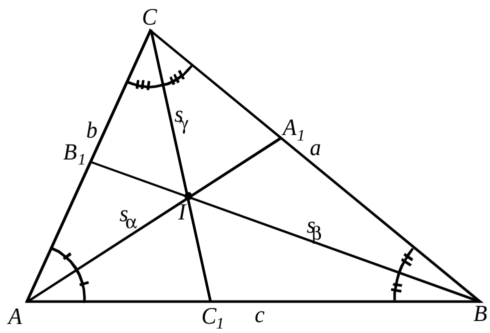
$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}} = \frac{a}{c},$$

a odavde zbog $\overline{AB_1} + \overline{CB_1} = b$:

$$\frac{\overline{B_1C}}{b - \overline{B_1C}} = \frac{a}{c}, \text{ tj.}$$

$$\overline{B_1C} = \frac{ab}{a+c}. \tag{5}$$



Primjenjujući prethodnu teoremu na trougao ΔBCB_1, dobijamo:

$$\frac{\overline{B_1I}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{BC}}. \qquad (6)$$

Sada iz (5) i (6) slijedi:

$$\frac{\overline{B_1I}}{\overline{BI}} = \frac{b}{a+c}.$$

Analogno dobijamo da tačka I dijeli simetrale s_α i s_γ u omjerima:

$$\frac{\overline{A_1I}}{\overline{AI}} = \frac{a}{b+c} \text{ i } \frac{\overline{C_1I}}{\overline{CI}} = \frac{c}{a+b}.$$

Zadatak 1. Neka se simetrale AA_1, BB_1 i CC_1 unutrašnjih uglovi α, β i γ trougla ΔABC sijeku u tački I. Dokazati da vrijedi:

a) $\dfrac{\overline{IA_1}}{\overline{AA_1}} + \dfrac{\overline{IB_1}}{\overline{BB_1}} + \dfrac{\overline{IC_1}}{\overline{CC_1}} = 1$;

b) $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{AA_1}} + \dfrac{\overline{IB}}{\overline{BB_1}} + \dfrac{\overline{IC}}{\overline{CC_1}} = 2$;

c) $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IA_1}} + \dfrac{\overline{IB}}{\overline{IB_1}} + \dfrac{\overline{IC}}{\overline{IC_1}} > 3$;

d) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{\overline{IA}}{\overline{AA_1}} \cdot \dfrac{\overline{IB}}{\overline{BB_1}} \cdot \dfrac{\overline{IC}}{\overline{CC_1}} \le \dfrac{8}{27}$;

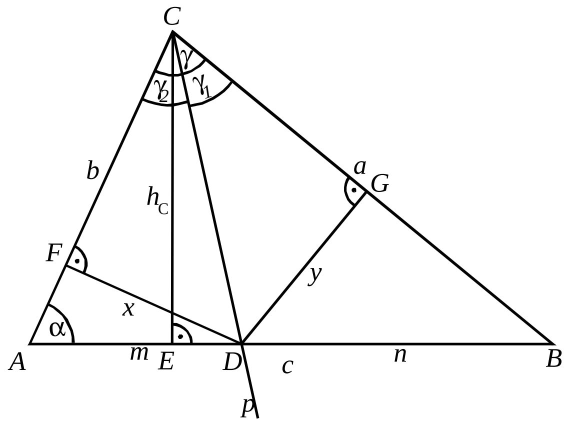
e) $\overline{IB_1} \cdot \overline{IC_1} < \dfrac{1}{4}\overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} < \overline{IB} \cdot \overline{IC}$.

Sada ćemo dokazati obrat (konverziju) teoreme 2.

Teorema 3. Ako prava povučena kroz jedan vrh trougla ΔABC dijeli naspramnu stranicu u (unutrašnjem) omjeru dužina drugih dviju stranica (pri čemu svaki od tih dijelova sa odgovarajućom stranicom ima zajednički vrh), tada je ta prava simetrala tog ugla trougla.

Dokaz: Neka prava p povučena kroz vrh C trougla ΔABC dijeli ugao pri tome vrhu na dva dijela (uglovi $\measuredangle ACD = \gamma_2$ i $\measuredangle BCD = \gamma_1$, gdje je $\{D\} = p \cap AB$). Neka je $\overline{AD} = m$ i $\overline{BD} = n$. Po pretpostavci teoreme je:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}. \qquad (7)$$



Treba, dakle, dokazati da je $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma$, gdje je $\gamma = \measuredangle ACB$. Dovoljno je dokazati ustvari da je tačka D jednako udaljena od krakova ugla $\measuredangle ACB$, tj. da je $x = \overline{DF} = \overline{DG} = y$.

Neka je tačka E podnožje visine iz vrha C trougla ΔABC, tj. $h_c = \overline{CE}$, $\left(\overline{CE} \perp AB\right)$.

Sada su trouglovi ΔADF i ΔACE slični (jer su pravougli i ugao α kod vrha A im je zajednički), te imamo:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{x}{m} = \frac{h_c}{b}. \qquad (8)$$

Isto tako iz sličnosti trouglova ΔBDG i ΔBCE dobijamo da je:

$$\frac{y}{n} = \frac{h_c}{a}. \qquad (9)$$

Sada iz (7), (8) i (9) slijedi

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{mh_c}{b}}{\frac{nh_c}{a}}=\frac{amh_c}{bnh_c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

a odavde $x=y$, što znači da je duž CD simetrala ugla $\measuredangle ACB=\gamma$. Ovim je teorema dokazana.

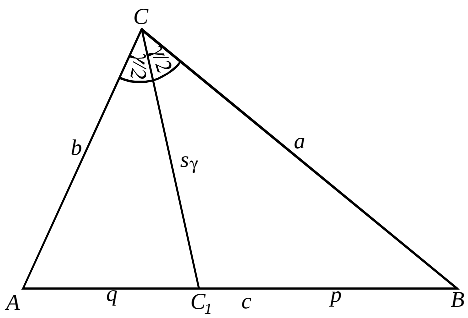
Sada ćemo preći na izračunavanje dužina simetrala s_α, s_β i s_γ unutrašnjih uglova trougla ΔABC.

Teorema 4. Dokazati da je dužina simetrale ugla $\measuredangle ACB=\gamma$ jednaka

$$s_\gamma=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}, \qquad (10)$$

gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Dat ćemo opet tri razna dokaza teoreme 4.



Dokaz 1. **(Pomoću kosinusne teoreme)** Neka je $\overline{CC_1}=s_\gamma$ simetrala unutrašnjeg ugla γ trougla ΔABC. Sada na osnovu kosinusne teoreme dobijamo iz trouglova ΔACC_1 i ΔBCC_1:

$$q^2=b^2+s_\gamma^2-2bs_\gamma\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$p^2=a^2+s_\gamma^2-2as_\gamma\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

a odavde

$$\frac{b^2+s_\gamma^2-q^2}{2bs_\gamma}=\frac{a^2+s_\gamma^2-p^2}{2as_\gamma}, \text{ tj.}$$

$$\frac{b^2+s_\gamma^2-q^2}{b}=\frac{a^2+s_\gamma^2-p^2}{a},$$

odnosno

$$bp^2 - aq^2 + ab^2 + as_\gamma^2 - a^2b - bs_\gamma^2 = 0\,,$$

te

$$s_\gamma^2 = \frac{aq^2 - bp^2 + a^2b - ab^2}{a-b}\,,$$

a odavde zbog $p = \frac{ac}{a+b}$ i $q = \frac{bc}{a+b}$ (ovo smo dokazali u primjeru 1.):

$$s_\gamma^2 = \frac{1}{a-b}\left[\frac{ab^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{a^2bc^2}{(a+b)^2} + ab(a-b)\right], \text{ tj.}$$

$$s_\gamma^2 = \frac{1}{a-b}\left[\frac{-abc^2(a-b)}{(a+b)^2} + ab(a-b)\right],$$

odnosno

$$s_\gamma^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right],$$

ili

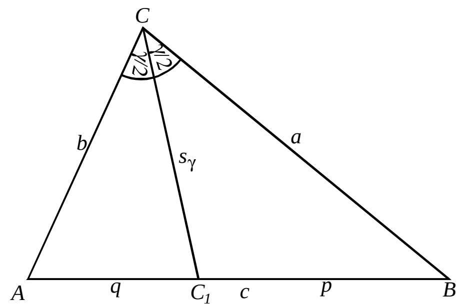
$$s_\gamma^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c), \text{ tj.}$$

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}\,, \text{ q.e.d.}$$

Analogno obrascu (10), izvodimo i obrasce:

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}\,, \qquad (10')$$

$$s_\beta = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)}\,. \qquad (10'')$$



Dokaz 2. **(Pomoću površina trouglova)** Očigledno, imamo:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ACC_1} + P_{\Delta BCC_1} \text{, tj.}$$

$$\frac{ab}{2} sin\gamma = \frac{bs_\gamma}{2} sin\frac{\gamma}{2} + \frac{as_\gamma}{2} sin\frac{\gamma}{2} \text{,}$$

a odavde zbog $sin\gamma = 2sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}$:

$$2ab\,cos\frac{\gamma}{2} = (a+b)s_\gamma \text{, te}$$

$$s_\gamma = \frac{2ab}{a+b}cos\frac{\gamma}{2}. \tag{11}$$

U literaturi se često nalazi i ovaj obrazac (11) i koristi se u radu. Mi ćemo otići nešto dalje, tj. koristit ćemo obrasce:

$$cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\gamma}{2}} \text{,}$$

kao i

$$cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \text{,}$$

te dobiti iz (11) nakon uvrštavanja:

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)} \text{ ; } \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

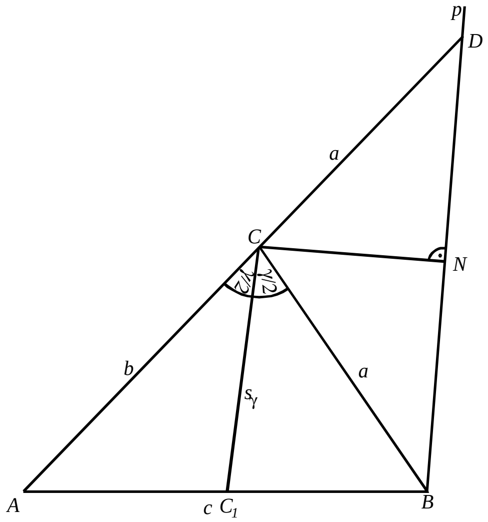
a ovo je (10).

Dokaz 3. (Pomoću Talesove teoreme i trigonometrije pravouglog trougla) Ovaj dokaz je relativno kratak i efektan. Povucimo pravu p kroz vrh B trougla ΔABC koja je paralelna simetrali CC_1 ugla γ, tj. $p \| CC_1$, i neka je $\{D\} = p \cap AC$. Pošto je sada $\measuredangle ACC_1 = \measuredangle CDB$, te $\measuredangle BCC_1 = \measuredangle CBD$, odnosno $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD = \frac{\gamma}{2}$ (jer je

$\frac{\gamma}{2} = \measuredangle ACC_1 = \measuredangle BCC_1$), to je trougao ΔBCD jednakokraki. Sada na osnovu Talesove teoreme dobijamo:

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}},$$

a odavde



$$\overline{CC_1} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AC} + \overline{CD}}, \text{ tj.}$$

$$\overline{CC_1} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AC} + \overline{BC}}, \qquad (12)$$

(jer je trougao ΔBCD jednakokraki i $\overline{CD} = \overline{BC}$).

Neka je CN visina jednakokrakog trougla ΔBCD. Sada je iz pravouglog trougla ΔCDN :

$$\cos \measuredangle CDN = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}, \text{ tj. } \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BD}}{\overline{BC}},$$

a odavde

$$\overline{BD} = 2\overline{BC}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (13)$$

Sada iz (12) i (13) dobijamo:

$$s_\gamma \left(= \overline{CC_1}\right) = \frac{2\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \cos\frac{\gamma}{2}, \text{ tj.}$$

$$s_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2},$$

a ovo je traženi obrazac (11).
Analogno dobijamo da je

$$s_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} \text{ i } s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Koristeći obrasce za s_a i s_β sada možemo dokazati poznatu **Štajnerovu teoremu** (J. Steiner, 1796.-1863. švajcarski matematičar), koja glasi:
Ako su dužine simetrala dva ugla trougla jednake, trougao je jednakokraki.

Dokaz: Neka je $s_a = s_\beta$, tj.

$$\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b(s-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{a(s-b)}}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 \cdot b(s-a) = (b+c)^2 \cdot a(s-b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2}(a+c)^2(b+c-a) = \frac{a}{2}(b+c)^2(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow b(a+c)^2(b+c) - ab(a+c)^2 = a(b+c)^2(a+c) - ab(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow ab\left[(b+c)^2 - (a+c)^2\right] + (b+c)(a+c)\left[b(a+c) - a(b+c)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b+2c)(b-a) + c(b+c)(a+c)(b-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left[ab(a+b+2c) + c(b+c)(a+c)\right] = 0$$

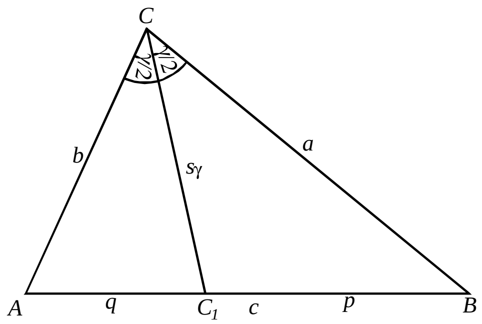
$\Leftrightarrow b-a=0$, tj. $a=b$ (jer je izraz u uglastoj zagradi pozitivan).
Dakle, zbog $a=b$ slijedi da je trougao ΔABC jednakokraki.

Napomena: Važno je istaći da čisto geometrijski dokaz Štajnerove teoreme nije nimalo lagan. U [1] je dato nekoliko raznih dokaza ove teoreme.

Sada ćemo dokazati više nejednakosti koristeći obrasce za s_a, s_β i s_γ.
Nejednakost 1. Dokazati da u trouglu važi nejednakost

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 3s\,; \qquad (14)$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Dokaz: Ovo se lako dokaže primjenjujući nejednakost trougla na trouglove ΔACC_1 i ΔBCC_1 :

$$s_\gamma < b+q,$$
$$s_\gamma < a+p,$$

a odavde nakon sabiranja:

$$2s_\gamma < a+b+p+q\ ,$$

odnosno zbog $p+q=c$:

$$2s_\gamma < a+b+c\text{ , tj.}$$

$$s_\gamma < s\ .$$

Analogno dobijamo i nejednakosti $s_\alpha < s$ i $s_\beta < s$, a nakon sabiranja ovih nejednakosti, dobijamo nejednakost:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 3s\text{ , q.e.d.}$$

Sada ćemo dokazati da važe mnogo bolje (jače) nejednakosti od nejednakosti (14), tj. dokazat ćemo da važe nejednakosti:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s\ , \qquad (15)$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Dokaz: Uzet ćemo obrazac (10), tj.

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}\ .$$

Na osnovu nejednakosti $A \ge G$, imamo:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}\ ; \quad (a,b>0)$$

a odavde

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \le 1 .$$

Sada dobijamo iz obrasca za s_γ:

$$s_\gamma \le \sqrt{s(s-c)} . \tag{16}$$

Na osnovu nejednakosti $G \le A$ imamo:

$$\sqrt{s(s-c)} < \frac{s+s-c}{2} \text{, tj.}$$

$$\sqrt{s(s-c)} < \frac{2s-c}{2} . \tag{17}$$

(Ovdje vrijedi stroga nejednakost $<$, jer je $s \ne s-c$).
Lako dobijamo analogne nejednakosti:

$$s_\alpha \le \sqrt{s(s-a)} < \frac{2s-a}{2} \text{, te}$$

$$s_\beta \le \sqrt{s(s-b)} < \frac{2s-b}{2} .$$

Nakon sabiranja nejednakosti (16) i (17) sa ovim nejednakostima, dobijamo novu nejednakost koja glasi:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \le \sqrt{s}\left(\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\right) < 2s ,$$

a ovo je nejednakost (15), q.e.d.

Napomena: Poboljšanje (15) nejednakosti (14) je evidentno jer je očigledno $2s < 3s$, te predstavlja značajan rezultat kod dokazivanja geometrijskih nejednakosti u vezi trougla.

Nejednakost (16) i njoj analogne nejednakosti, tj. $s_\gamma \le \sqrt{s(s-c)}, s_\alpha \le \sqrt{s(s-a)}$ i $s_\beta \le \sqrt{s(s-b)}$ imaju nekoliko inetresantnih posljedica.

Posljedica 1.

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma \le rs^2 .$$

Dokaz: Imamo

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma \le \sqrt{s(s-a)} \cdot \sqrt{s(s-b)} \cdot \sqrt{s(s-c)}$$

$$= s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ (Heronov obrazac)}$$

$$= s \cdot P = s \cdot rs = rs^2 \text{, q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trougao jednakostraničnji.

Posljedica 2.

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \le s^2 .$$

Dokaz: Imamo

$$s_\alpha^2 \le s(s-a);\ s_\beta^2 \le s(s-b) \text{ i } s_\gamma^2 \le s(s-c) ,$$

a odavde nakon sabiranja:

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \le s(s-a+s-b+s-c)$$

$$= s[3s-(a+b+c)]$$

$$= s(3s-2s)$$

$$= s^2 \text{, q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trougao jednakostranični.

Posljedica 3.

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \le s^2 .$$

Dokaz: Imamo

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \le \sqrt{s(s-a)}\cdot\sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-b)}\cdot\sqrt{s(s-c)} + \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-c)}$$

$$= s\left(\sqrt{(s-a)(s-b)} + \sqrt{(s-b)(s-c)} + \sqrt{(s-a)(s-c)}\right)$$

$$\overset{(G\le A)}{\le} s\left(\frac{s-a+s-b}{2} + \frac{s-b+s-c}{2} + \frac{s-a+s-c}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}s\left[2s-(2s-c)+2s-(2s-a)+2s-(2s-b)\right]$$

$$= \frac{1}{2}s(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{2}s\cdot 2s = s^2 \text{, q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

Nejednakost 2. Dokazati da važi nejednakost

$$s_\gamma \le t_c\,, \tag{18}$$

gdje je s_γ simetrala unutrašnjeg ugla γ trougla ΔABC, a t_c težišnica iz vrha C tog trougla.

Dokaz: Najprije ćemo dokazati jednu pomoćnu nejednakost koja glasi:

$$\frac{t_c}{s_\gamma} \ge \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\,. \tag{19}$$

Imamo

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 = \frac{t_c^2}{s_\gamma^2} = \frac{\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}{\frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2-c^2\right]} = \frac{(a+b)^2}{4ab}\cdot\frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}\,. \tag{20}$$

Dokazat ćemo sada da je

$$\frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \ge 1\,, \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq (a+b)^2 - c^2 \text{ (jer je } a+b > c\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab - c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (tačno).}$$

Dakle, nejednakost (21) je tačna. Sada iz nejednakosti (20) i (21) slijedi da je:

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4ab},$$

a odavde

$$\frac{t_c}{s_\gamma} \geq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}, \text{ q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi u slučaju kada je $a = b$.
Sada iz nejednakosti $A \geq G$ slijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \ (a,b > 0)$$

a odavde

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 1. \tag{22}$$

Najzad, iz nejednakosti (19) i (22) slijedi nejednakost (18), tj. $s_\gamma \leq t_c$.
Koristeći analogne nejednakosti $s_\alpha \leq t_a$ i $s_\beta \leq t_b$ dobijamo novu nejednakost:

$$\frac{t_a}{s_\alpha} + \frac{t_b}{s_\beta} + \frac{t_c}{s_\gamma} \geq 3,$$

te

$$\frac{s_\alpha}{t_a} + \frac{s_\beta}{t_b} + \frac{s_\gamma}{t_c} \leq 3,$$

kao i

$$s_a + s_\beta + s_\gamma \leq t_a + t_b + t_c.$$

Jednakost vrijedi u tri posljednje nejednakosti ako i samo ako je $a = b = c$, tj. za jednakostranični trougao.

Nejednakost 3. Dokazati da u trouglu važi nejednakost

$$\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}\geq\frac{9}{s^2}. \tag{23}$$

Dokaz: Iz nejednakosti $s_\alpha\leq\sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta\leq\sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma\leq\sqrt{s(s-c)}$, dobijamo:

$$\frac{1}{s_\alpha^2}\geq\frac{1}{s(s-a)},\ \frac{1}{s_\beta^2}\geq\frac{1}{s(s-b)}\ \text{ i }\ \frac{1}{s_\gamma^2}\geq\frac{1}{s(s-c)}.$$

Nakon sabiranja ovih nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}&\geq\frac{1}{s(s-a)}+\frac{1}{s(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\\&=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\\&=\frac{1}{s}\cdot\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{s^2-sb-sc+bc+s^2-as-cs+ac+s^2-as-bs+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ac}{P^2},\end{aligned}$$

a odavde zbog činjenice da je $a+b+c=2s$, $P=rs$, $ab+bc+ac=r^2+s^2+4Rr$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}&\geq\frac{3s^2-4s^2+r^2+s^2+4Rr}{r^2s^2}\\&=\frac{r^2+4Rr}{r^2s^2}\ \text{(zbog Ojlerove nejednakosti } R\geq 2r\text{)}\\&\geq\frac{r^2+8r^2}{r^2s^2}=\frac{9}{s^2},\ \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Jednakost u (23) važi ako i samo ako je $a=b=c$, tj. kada je u pitanju jednakostranični trougao.

Nejednakost 4. Dokazati da vrijedi nejednakost u trouglu

$$\frac{s_\alpha}{a}+\frac{s_\beta}{b}+\frac{s_\gamma}{c}\le\frac{s}{2r}. \tag{24}$$

Dokaz: Koristeći već dobro poznate nejednakosti $s_\alpha \le \sqrt{s(s-a)}, s_\beta \le \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \le \sqrt{s(s-c)}$ kao i obrasce za površinu trougla $P=\frac{ah_a}{2}$, $P=\frac{bh_b}{2}$ i $P=\frac{ch_c}{2}$, te činjenicu da je $h_a \le s_\alpha$, $h_b \le s_\beta$ i $h_c \le s_\gamma$, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{s_\alpha}{a}+\frac{s_\beta}{b}+\frac{s_\gamma}{c} &= \frac{s_\alpha h_a}{2P}+\frac{s_\beta h_b}{2P}+\frac{s_\gamma h_c}{2P}\\
&\le \frac{1}{2P}\left(s_\alpha^2+s_\beta^2+s_\gamma^2\right)\\
&\le \frac{1}{2rs}\left[s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)\right]\\
&= \frac{1}{2r}(s-a+s-b+s-c)\\
&= \frac{1}{2r}\left[3s-(a+b+c)\right]\\
&= \frac{1}{2r}(3s-2s)=\frac{s}{2r}, \text{ q.e.d.}
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi u (24) ako i samo ako je $a=b=c$, tj. za jednakostranični trougao.

Preporučujemo da se pokušaju riješiti sljedeći zadaci:

Zadatak 2. Dokazati da za trougao vrijedi nejednakost

$$s_\alpha^2+s_\beta^2+s_\gamma^2 \le 3P\sqrt{3}.$$

Zadatak 3. Dokazati da za trougao vrijedi nejednakost

$$s_\alpha^2 s_\beta^2+s_\beta^2 s_\gamma^2+s_\alpha^2 s_\gamma^2 \le rs^2(4R+r).$$

Zadatak 4. Ako je u trouglu $\alpha<\gamma$, tada je $s_\alpha > s_\gamma$. Dokazati.

LITERATURA

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka 1,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
[3] **Bottema, O. and oth.**, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
[4] **Bulajich, M.R., Gomez, O.J.A., Delgado, V.R.**, *Inequalities, A Mathematical Olympiad* Approach, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.
[5] **Marić, A.**, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
[6] **Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Volenec, V.**, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989.
[7] **Palman, D.**, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.