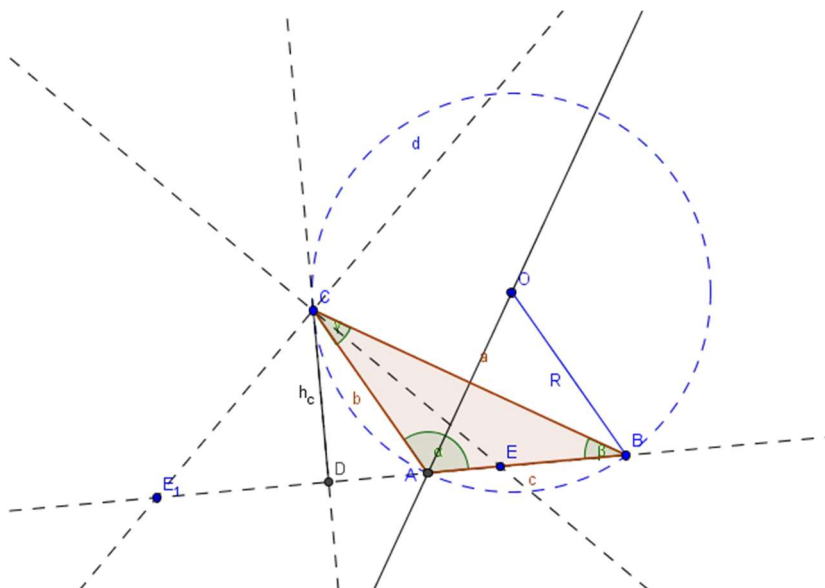


JEDNA KLASA TUPOUGLIH TROUGLOVA

Neka je ΔABC trougao čije ćemo elemente označavati na uobičajeni način: a, b, c su dužine stranica, α, β, γ su unutrašnji uglovi, R je poluprečnik opisane kružnice, tačka O je centar opisane kružnice, P površina datog trougla, tačka D podnožje visine h_c povučene iz vrha C , dok su tačke E i E_1 tačke na pravoj AB takve da je CE simetrala unutrašnjeg, a CE_1 simetrala vanjskog ugla kod vrha C kao na slici 1.



Slika 1.

Pod pretpostavkom da vrijedi $\alpha - \beta = 90^\circ$ dokazat ćemo da za ΔABC vrijede sljedeće formule i osobine istaknute u tabeli 1.

Tabela 1.

Ako je $\alpha - \beta = 90^\circ$ tada u trouglu ABC vrijedi:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 = 4R^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (3)$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD} \quad (4)$$

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 \quad (5)$$

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6)$$

$$P = \frac{(a^2 - b^2)ab}{2(a^2 + b^2)} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a - b}{a + b} \quad (8)$$

$$\sin \gamma = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (9)$$

$$\overline{CE} = \overline{CE_1} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10)$$

Prava CO je paralelna pravoj AB (11)

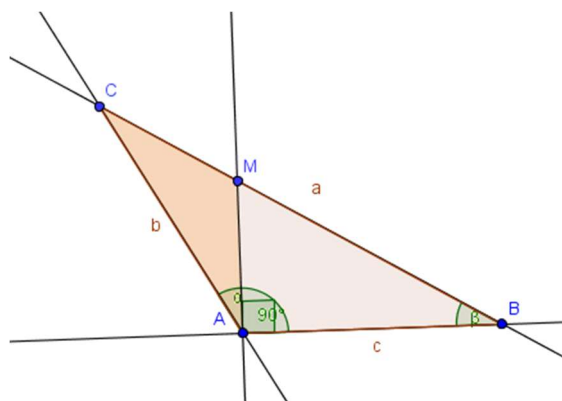
Visina h_c dodiruje opisanu kružnicu trougla ABC u tački C (12)

Ortocentar H trougla ABC je simetričan vrhu C u odnosu na pravu A (13)

Dokaz:

Zbog činjenice da je $\alpha = 90^\circ + \beta$, očito je trougao ABC tupougli trougao u kojem je najduža stranica a. Dalje, $\sin \alpha = \cos \beta$, pa je $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow a = 2R \cos \beta \wedge b = 2R \sin \beta$. Osobine (1) i (2) prikazane u Tabeli 1 slijede kao direktna posljedica ovih formula.

Formulu (1) možemo dokazati i na drugi način. U tu svrhu uzmimo da je M tačka na duži \overline{BC} takva da je $\sphericalangle BAM = 90^\circ$. Tada je $\sphericalangle MAC = \beta$, tako da su slični trouglovi ABC i AMC (Slika 2).



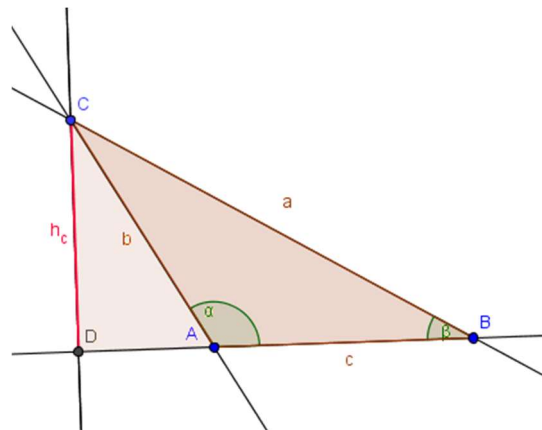
Slika 2.

Iz ove sličnosti se dobije da je $\overline{AM} = \frac{bc}{a} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{AM}}{c} = \frac{b}{a}$. Također iz te sličnosti se može dobiti $\overline{MC} = \frac{b^2}{a}$, odakle slijedi da je dužina duži $\overline{BM} = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Povucimo visinu $h_c = \overline{CD}$. Očito je $h_c = a \sin\beta = \frac{ab}{2R} = 2R \cos\beta \sin\beta$ (Slika 3). Kako je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4R^2 \cos^2\beta} + \frac{1}{4R^2 \sin^2\beta} = \frac{1}{4R^2 \cos^2\beta \sin^2\beta}$$

očito važi jednakost (3).



Slika 3.

U trouglu DAC sa slike 3 uočavamo da je $\sphericalangle DCA = \beta$, pa je taj trougao sličan trouglu DBC i vrijede jednakosti $\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{b}{a} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$. Odavde direktno slijedi jednakost (4) iz Tabele 1. Osim toga,

$$\overline{AD} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{AD} : \overline{BD} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}^2} = b^2 : a^2$$

čime je dokazana i tvrdnja (5).

Dalje, sa slike 3 vidimo $\overline{BD} = c + \overline{AD}$, pa je $\frac{c + \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{c}{\overline{AD}} = \frac{a^2}{b^2} - 1$. Pošto je

$$\overline{AD} = b \sin\beta = b \frac{b}{2R} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{dobija se } c = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Do istog rezultata smo mogli doći preko kosinusne teoreme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$, uzimajući u obzir da je $\gamma = 180^\circ - \beta - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - 2\beta \Rightarrow \cos\gamma = \sin 2\beta = 2 \sin\beta \cos\beta = \frac{ab}{2R^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

Također, isto možemo dobiti pomoću Pitagorine teoreme u pravouglom trouglu ABM (Slika 2) u kojem je jedna kateta $c = \overline{AB}$, druga kateta $\overline{AM} = \frac{bc}{a}$, a hipotenuza $\overline{BM} = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Formula (7) dobija se direktno iz formula (3) i (6) jer je $P = \frac{ch_c}{2}$.

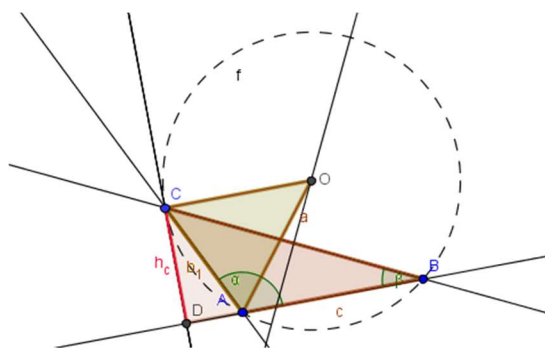
Očito je $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ - \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}$. Izveli smo formulu $\cos \frac{2a}{a^2+b^2}$. Odavde slijedi

$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2$. Pošto je $\sin \gamma > 0$ i $a > b$, očito vrijedi formula (9).

Osobina (10) slijedi iz činjenice da je trougao E_1EC jednakokraki jer je $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AE_1C = 45^\circ$. Naime, $\sphericalangle AEC = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 180^\circ - \left(90^\circ + \beta + \frac{90^\circ - 2\beta}{2} \right) = 45^\circ$.

$\alpha = \sphericalangle AE_1C + \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \sphericalangle AE_1C = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = 45^\circ$.

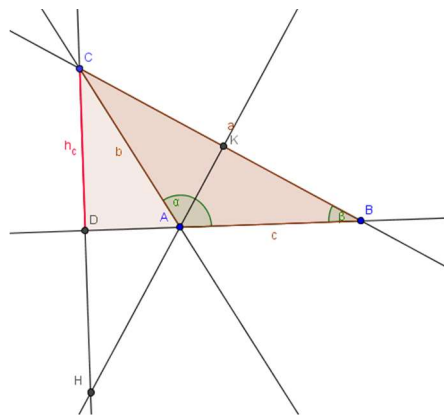
Trougao DEC je jednakokraki pravougli, pa je $\overline{CE} = h_c \sqrt{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zbog (3).



Slika 4.

Trougao AOC (Slika 4) je jednakokraki jer je $\overline{AO} = \overline{CO} = R$. Osim toga $\sphericalangle AOC = 2\beta$, što slijedi iz odnosa centralnog i periferijskog ugla nad istim lukom, a iz čega se dobije da je $\sphericalangle ACO = 90^\circ - \beta$. Zbog toga je $\sphericalangle ACO + \sphericalangle CAB = 180^\circ$, dakle ta dva ugla su suprotni na transversali AC zbog čega je $CO \parallel AB$.

Osobina (12) slijedi iz činjenice da je $\sphericalangle OCD = \sphericalangle ACO + \sphericalangle DCA = 90^\circ - \beta + \beta = 90^\circ$.



Slika 5.

Povucimo visinu \overline{AK} ($K \in \overline{BC}$) i produžimo je tako da se siječe sa pravom CD u tački H (Slika 5). Pošto je $\sphericalangle DCA = \beta$ i $\sphericalangle BAK = \sphericalangle DAH = 90^\circ - \beta \Rightarrow \sphericalangle DHA = \beta$, očito je tačna i zadnja navedena osobina.

Pretpostavimo sada da je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod vrha C , dakle $\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$. Tada možemo uočiti veliku sličnost sa trouglom kod kojeg je razlika uglova prav ugao, što se tiče formula (1)-(10).

Formule (1) – (5) ostaju da važe.

Formula (6) se mijenja tako da umjesto $c = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ vrijedi $c = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. U formulama (7), (8) i (9) također u brojniku umjestu znaka $-$ treba staviti znak $+$ da bi bile tačne za pravougli trougao:

$$P = \frac{(a^2 + b^2)ab}{2(a^2 + b^2)} = \frac{ab}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a + b}{a + b} = 1$$

$$\sin \gamma = \sin 90^\circ = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Ako su E i E_1 tačke u kojima simetrale unutrašnjeg, odnosno vanjskog ugla kod vrha C sijeku pravu AB , tada je $\overline{CE} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$, $\overline{CE_1} = \frac{ab\sqrt{2}}{|a-b|}$.