Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

XV JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 27.5.2017.

Rješenja zadataka

Zadatak 1. Odrediti sve trocifrene brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su cifre) za koje vrijedi
$$\overline{xyz} = x + y + z + xy + yz + xz + xyz.$$

Rješenje. Rastavimo broj $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Tada uslov zadatka postaje
$$100x + 10y + z = x + y + z + xy + yz + xyz.$$
Na osnovu toga je
$$99x + 9y = xy + yz + xz + xyz.$$
Sada imamo
$$99x + 9y - xy = z(x + y + xy).$$
Iz toga je
$$z = \frac{99x + 9y - xy}{x + y + xy}.$$
Kako je z cifra, mora biti $z \leq 9$. Samim tim, mora biti
$$\frac{99x + 9y - xy}{x + y + xy} \leq 9.$$
Ovo možemo pisati kao
$$99x + 9y - xy \leq 9x + 9y + 9xy.$$
$$90x \leq 10xy.$$
$$9 \leq y.$$
Kako je y cifra, mora biti $y = 9$. Uvrštavajući u $z = \frac{99x+9y-xy}{x+y+xy}$, dobijamo
$$z = \frac{90x + 81}{10x + 9} = 9.$$
Dakle, $z = 9$. Ostaje da odredimo x. Vratimo se u početnu jednakost
$$x + y + z + xy + yz + xz + xyz = 100x + 10y + z.$$
Uvrštavajući $y = z = 9$ dobijamo
$$x + 9 + 9 + 9x + 81 + 9x + 81x = 100x + 90 + 9.$$
$$100x + 99 = 100x + 99.$$
Dakle, ova jednakost vrijedi za svako x, pa su traženi brojevi
$$199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899, 999.$$

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

Zadatak 2. Dat je skup $A = \{1,2,3, \dots ,2017\}$. Podskup S skupa A zovemo *dobar* ako za sve $x \in S$ suma preostalih elemenata skupa S ima posljednju cifru kao i broj x. Dokazati da ne postoji dobar podskup S sa 405 elemenata.

Rješenje. Pretpostavimo da postoji dobar podskup S sa 405 elemenata. Neka je

$$S = \{a_1, a_2, \dots , a_{405}\}$$

dobar podskup. Neka je Z suma elemenata skupa S. Tada je

$$Z - a_i \equiv a_i \ (mod\ 10),$$

za sve $i = 1,2, \dots ,405$. Dakle

$$Z \equiv 2a_i \ (mod\ 10).$$

Ako saberemo ovih 405 kongruencija, dobijamo

$$405 \cdot Z \equiv 2 \cdot Z \ (mod\ 10).$$

$$403 \cdot Z \equiv 0 \ (mod\ 10).$$

Kako su 403 i 10 relativno prosti, imamo da je $Z \equiv 0 \ (mod\ 10)$.
Na osnovu toga je $2a_i \equiv 0 \ (mod\ 10)$, za sve $i = 1,2, \dots ,405$. Iz toga je $a_i \equiv 0 \ (mod\ 10)$ ili $a_i \equiv 5 \ (mod\ 10)$. Međutim, u skupu A imamo 201 član koji se završava sa 0 i 202 člana koji se završavaju sa 5. Kontradikcija.

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com Tel.: ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 ID broj: 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

Zadatak 3. Posmatrajmo trougao ABC takav da je ugao kod vrha B jednak 90°. Označimo sa I centar upisane kružnice, te neka su F, D i E tačke gdje upisana kružnica dodiruje stranice AB, BC i AC, redom. Ukoliko se CI i EF sijeku u M i ukoliko se DM i AB sijeku u N, dokazati da je

$$AI = ND.$$

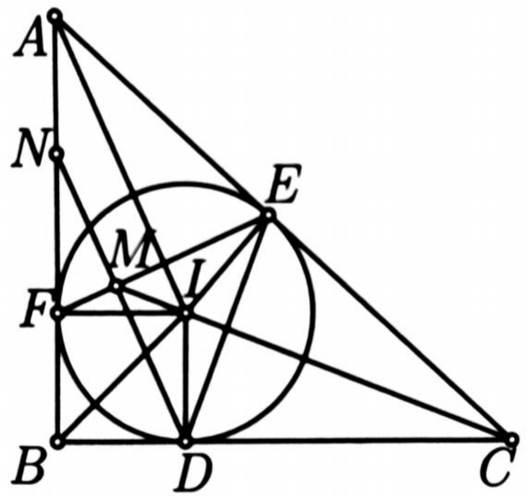
Rješenje. Trougao AFE je jednakokrak ($AE = AF$) i kako je AI okomito na FE imamo $\angle AEF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Slično dobijemo da je $\angle DEC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Sada je

$$\angle MED = 180^\circ - \angle AEF - \angle DEC = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = 45^\circ. (1)$$

Kako je $\Delta MDC \cong \Delta MEC$, dobijamo da je

$$MD = ME. (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi da je trougao MED jednakokrako pravougli. Iz ovoga slijedi da je DN okomito EF, a kako je i AI okomito na EF, to je $DN||AI$. Kako je i $AN||ID$, zaključujemo da je četverougao $ANDI$ paralelogram. Iz toga je očigledno $AI = ND$.



Zadatak 4. U svako polje tabele 5×5 upisan je prirodan broj od 1 do 5 tako da se svaki broj pojavljuje tačno jednom u svakoj koloni i svakom redu. Broj u nekom redu i koloni se naziva *dobro pozicioniranim*, ukoliko zadovoljava naredne uslove:

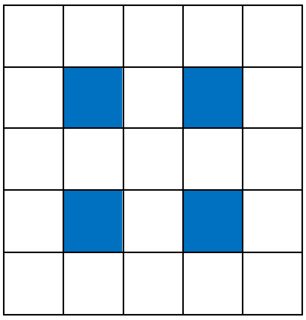
- U tom redu, svi brojevi lijevo od dobro pozicioniranog broja su manji od njega, a svi brojevi desno su veći od njega, ili obrnuto.
- U toj koloni, svi brojevi ispod dobro pozicioniranog broja su manji od njega, a svi brojevi iznad su veći od njega, ili obrnuto.

Koji je maksimalan broj dobro pozicioniranih brojeva koje možemo smjestiti u tabelu?

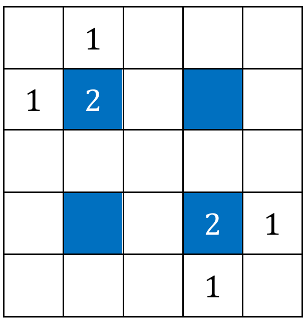
Rješenje. Konstruišemo rješenje sa 5 dobro pozicioniranih brojeva.

1	2	4	3	**5**
3	4	5	1	2
2	1	**3**	5	4
4	5	1	2	3
5	3	2	4	**1**

Uočimo da broj 3 može biti dobro pozicioniran samo ukoliko se nalazi u centralnom polju. Također, brojevi 1 i 5 mogu biti dobro pozicionirani samo u ugaonim poljima table. Slično, za 2 i 4 možemo zaključiti da mogu biti dobro pozicionirani samo ukoliko se nalaze na ispod označenim poljima.



Dokažimo da je ukupan broj dobro pozicioniranih jedinica i dvojki zajedno je najviše 2. Ako imamo broj 2 na jednom od četiri označena polja, jasno je da broj 2 može biti samo na još jednom od ova četiri polja (dijagonalno označeno polje). Ako bi se broj 2 nalazio i na tom polju, onda su u svim vrstama i kolonama u kojima se nalaze dobro pozicionirani brojevi 2 određena polja i za brojeve 1, kao u primjeru na slici ispod.



Iz ovoga slijedi da broj 1 ne može biti dobro pozicioniran, jer se ne može nalaziti ni u jednom ugaonom polju. Ako bi imali jedan dobro pozicioniran broj 2, imali bi mogućnost za jedan dobro pozicioniran broj 1, kao na slici ispod.

	1			
1	2			
				1

Očigledno je da ako nemamo dobro pozicioniranih brojeva 2, tada možemo imati maksimalno dvije dobro pozicionirane jedinice.
Isto tvrđenje važi i za pozicioniranje brojeva 4 i 5. Iz ovoga zaključujemo da možemo imati najviše 5 dobro pozicioniranih brojeva.